LEZIONE 1

SPAZIO VETTORIALE: DEFINIZIONE E PROPRIETÀ NECESSARIE

- È UN INSIEME DI VETTORI

Definizione 2.1 *Sia dato un insieme di elementi* (vettori) *per i quali è definita un'operazione di somma '+'. Si consideri l'insieme numerico* (campo) K, *tale che tra i suoi elementi sono definite l'operazione prodotto '$\cdot$' e l'operazione somma '$\oplus$'; inoltre tra gli elementi di K ed i vettori di V è definita l'operazione '$\bullet$'. Definiamo l'insieme di vettori* **spazio vettoriale** $V(K)$ *se soddisfa le seguenti proprietà:*

0)	$x+y \in V(K)$,	$\forall x,y \in V(K)$
1)	$(x+y)+z = x+(y+z)$,	$\forall x,y,z \in V(K)$
2)	$\exists w \in V(K) \ : \quad x+w=x$,	$\forall x \in V(K)$
3)	$\forall x \in V(K),\ \exists \bar{x} \in V(K) \ : \quad x+\bar{x}=w$,	
4)	$x+y=y+x$,	$\forall x,y \in V(K)$
5)	$\alpha \bullet x \in V(K), \quad \alpha \bullet (\beta \bullet x) = (\alpha \cdot \beta) \bullet x$,	$\forall x \in V(K),\ \forall \alpha,\beta \in K$
6)	$\exists \sigma \in K \ : \quad \sigma \bullet x = x$,	$\forall x \in V(K)$
7)	$\alpha \bullet (x+y) = \alpha \bullet x + \alpha \bullet y$,	$\forall x,y \in V(K),\ \forall \alpha \in K$
8)	$(\alpha \oplus \beta) \bullet x = \alpha \bullet x + \beta \bullet x$,	$\forall x \in V(K),\ \forall \alpha,\beta \in K$

□

$V(K)$: SPAZIO VETTORIALE "V DI K"

V : INSIEME DI VETTORI

K : INSIEME DI NUMERI

PER ESSERE DEFINITO TALE, LO SPAZIO VETTORIALE DEVE GODERE DI QUESTE 9 (0-8) PROPRIETÀ

NOTA: LE OPERAZIONI POSSONO NON ESSERE QUELLE CLASSICHE: LE DEFINIAMO NOI IN BASE A QUELLO CHE DOBBIAMO FARE

- PROPRIETÀ 0 - 4 : OPERAZIONI TRA VETTORI
- PROPRIETÀ 5 - 8 : OPERAZIONI TRA VETTORI E SCALARI

NOTA: ELEMENTO INVERSO (OPPOSTO) ED ELEMENTO NEUTRO (SCALARE O VETTORIALE) SONO UNICI

- **PROPRIETÀ 0** (CHIUSURA RISPETTO ALL'ADDIZIONE)

DATI 2 VETTORI QUALSIASI $\in V$, LA LORO SOMMA APPARTIENE ANCORA A V

- **PROPRIETÀ 1** (ASSOCIATIVITÀ DELL'ADDIZIONE)

DATI 3 VETTORI QUALSIASI $\in V$, LA SOMMA DEI PRIMI DUE CON IL TERZO È UGUALE ALLA SOMMA DEGLI ULTIMI 2 CON IL PRIMO

- **PROPRIETÀ 2** (ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO PER L'ADDIZIONE)

DATO UN QUALSIASI VETTORE $\in V$, SOMMANDOLO A w (ELEMENTO NEUTRO) SI OTTIENE NUOVAMENTE IL VETTORE DI PARTENZA

- **PROPRIETÀ 3** (ESISTENZA DELL'OPPOSTO PER L'ADDIZIONE, DI SOLITO $x \neq \bar{x}$ MA NON SEMPRE)

DATO 1 VETTORE QUALSIASI $\in V$, $\exists$ UN ALTRO VETTORE CHE SOMMATO AL PRIMO DÀ COME RISULTATO IL VETTORE NULLO (O NEUTRO)

- **PROPRIETÀ 4** (COMMUTATIVITÀ DELL'ADDIZIONE)

DATI 2 VETTORI QUALSIASI $\in V$, IL PRIMO SOMMATO AL SECONDO DÀ LO STESSO RISULTATO DEL SECONDO SOMMATO AL PRIMO

- **PROPRIETÀ 5** (CHIUSURA RISPETTO ALLA MOLTIPLICAZIONE (OPERAZIONE) PER SCALARE)

DATO UN VETTORE E UN QUALSIASI SCALARE $\alpha \in K$, MOLTIPLICANDO (O APPLICANDO OPERAZIONE) TRA I DUE OTTENGO NUOVAMENTE UN'ALTRO VETTORE $\in V(K)$.

- 5.1 (ASSOCIATIVITÀ DELLA MOLTIPLICAZIONE PER SCALARE)

DATO UN VETTORE E DUE QUALSIASI SCALARI $\alpha, \beta \in K$, MOLTIPLICANDO (||) β PER IL VETTORE ED IL RISULTATO CON α, È COME MOLTIPLICARE PRIMA $\alpha \cdot \beta$ E POI IL RISULTATO PER IL VETTORE

- **PROPRIETÀ 6** (ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO PER LA MOLTIPLICAZIONE (OPERAZIONE) PER SCALARE)

DATO UN QUALSIASI VETTORE $v \in V$, ESISTE $\underline{1}$ ELEMENTO $k \in K$ CHE MOLTIPLICATO (O CON OPERAZIONE) CON "v" DÀ COME RISULTATO DI NUOVO "v"

- **PROPRIETÀ 7** (DISTRIBUTIVITÀ RISPETTO ALL'ADDIZIONE (OPERAZIONE) DI VETTORI)

DATI 2 QUALSIASI VETTORI $\in V$, SE LI SOMMO E POI MOLTIPLICO IL RISULTATO PER UNO SCALARE $\alpha \in K$, È COME MOLTIPLICARE α PER OGNUNO DEI DUE VETTORI E POI SOMMARE I DUE RISULTATI

- **PROPRIETÀ 8** (DISTRIBUTIVITÀ RISPETTO ALL'ADDIZIONE DI SCALARI)

DATI 2 QUALSIASI SCALARI $\alpha, \beta \in K$ E UN VETTORE, SE SOMMO α E β E POI MOLTIPLICO IL RISULTATO PER IL VETTORE OTTENGO LO STESSO RISULTATO DI MOLTIPLICARE IL VETTORE PER α E β SEPARATAMENTE E POI SOMMARE I DUE RISULTATI.

- NOTA: POTREMMO DEFINIRE NOI IL NOSTRO SPAZIO VETTORIALE CON LE NOSTRE OPERAZIONI (ESEMPIO PROF.):
  - ↳ SPAZIO VETTORIALE: AULA
  - ↳ VETTORI: PERSONE NUDE
  - ↳ SCALARI: VESTITI
  - ↳ + TRA VETTORI: ABBRACCIO
  - ↳ ELEMENTO NEUTRO VETTORE: PERSONA INVISIBILE
  - ↳ OPERAZIONE "$\bullet$": INDOSSARE
  - ↳ OPERAZIONE "$\cdot$": METTERE UN VESTITO DENTRO L'ALTRO
  - ↳ OPERAZIONE "$\oplus$": CUCIRE 2 VESTITI
  - ↳ ELEMENTO NEUTRO SCALARE: VESTITO INVISIBILE

ESEMPI NOTEVOLI DI SPAZI VETTORIALI

$\mathbb{R}^m(\mathbb{R})$ — m: N° DI ELEMENTI DI UN VETTORE; $(\mathbb{R})$: SCALARI CHE VENGONO UTILIZZATI; $\mathbb{R}$: TIPO DI ELEMENTI NEL VETTORE

1) $\mathbb{R}^1(\mathbb{R})$ → DI SOLITO LO CHIAMIAMO SOLO $\mathbb{R}$

CONTIENE TUTTI I VETTORI DI 1 ELEMENTO $\in \mathbb{R}$

↳ LA DIMENSIONE DELLO SPAZIO VETTORIALE È 1, PERCHÉ LA SUA BASE CANONICA HA UN SOLO VETTORE: $\{(1)\}$. QUESTO VETTORE GENERA TUTTO $\mathbb{R}^1$, POICHÉ OGNI VETTORE $(x) \in \mathbb{R}^1(\mathbb{R})$ PUÒ ESSERE SCRITTO COME $k \cdot (1) = (x)$, CON $k \in \mathbb{R}$ (OSSIA IL CAMPO DELLO SPAZIO).

- **BASE CANONICA:** INSIEME DI VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI CHE GENERANO TUTTO LO SPAZIO VETTORIALE. OGNI VETTORE DELLO SPAZIO VETTORIALE PUÒ ESSERE SCRITTO COME COMBINAZIONE LINEARE

↳ ESEMPIO VETTORI IN $\mathbb{R}^1(\mathbb{R})$: $\{(0), (1), (-3.14), (\sqrt{2}) \dots\}$

- **LINEARMENTE INDIPENDENTI:** SIGNIFICA CHE NESSUNO DI ESSI PUÒ ESSERE ESPRESSO COME COMBINAZIONE LINEARE DEGLI ALTRI

↳ VETTORE NEUTRO: (0). ELEMENTO NEUTRO ADDIZIONE (0) E MOLTIPLICAZIONE (1)

2) $\mathbb{R}^m(\mathbb{R})$

CONTIENE TUTTI I VETTORI DI "m" ELEMENTI $\in \mathbb{R}$

↳ LA DIMENSIONE DELLO SPAZIO È "m", PERCHÉ LA SUA BASE CANONICA HA "m" VETTORI: $\{(1,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0), \dots, (0,0,\dots,1)\}$

↳ ESEMPIO DI VETTORI IN $\mathbb{R}^m(\mathbb{R})$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad \text{CON} \quad x_1, x_2 \dots x_m \in \mathbb{R}$$

↳ OGNI VETTORE $\in \mathbb{R}^m(\mathbb{R})$ PUÒ ESSERE ESPRESSO COME COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI DELLA BASE CANONICA:

(s = SCALARE, b = VETTORE DELLA BASE)

$$s_1 \cdot b_1 + s_2 \cdot b_2 \dots s_m \cdot b_m = v \in \mathbb{R}^m(\mathbb{R})$$

↳ ESEMPIO DI UTILIZZO DI UNO SCALARE $\alpha \in \mathbb{R}$ E $\underset{\text{VETTORE}}{x} \in \mathbb{R}^m(\mathbb{R})$

$$\alpha \cdot x = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ \alpha \cdot x_2 \\ \vdots \\ \alpha \cdot x_m \end{pmatrix}$$

↳ ESEMPIO DI SOMMA $x + y$ CON $x, y \in \mathbb{R}^m(\mathbb{R})$:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_m + y_m \end{pmatrix}$$

↳ VETTORE NEUTRO: $\overbrace{(0, 0, \dots, 0)}^{m \text{ VOLTE}}$. ELEMENTO NEUTRO ADDIZIONE (0) E MOLTIPLICAZIONE (1)

SPAZI VETTORIALI DI MATRICI (→ TABELLE) E POLINOMI

SIA LE MATRICI CHE POLINOMI SONO SPAZI VETTORIALI POICHÉ SODDISFANO LE 9 PROPRIETÀ / ASSIOMI.

↳ CONSIDERIAMO L'INSIEME DI MATRICI $M_{m,n}(\mathbb{R})$ CON "m" RIGHE E "n" COLONNE E OGNI SUO ELEMENTO $\in \mathbb{R}$. CONSIDERIAMO ANCHE UNO SCALARE $\alpha \in \mathbb{R}$.

IL PRODOTTO TRA MATRICE E SCALARE VIENE COSÌ DEFINITO: $(x \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ E $\alpha \in \mathbb{R})$

$$\alpha x = \alpha \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m,1} & \cdots & x_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_{1,1} & \cdots & \alpha x_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha x_{m,1} & \cdots & \alpha x_{m,n} \end{pmatrix}$$

→ PER FORMALITÀ AVREI DOVUTO METTERE $\alpha \bullet x$

MENTRE LA SOMMA $x + y$ (CON $x, y \in M_{m,n}(\mathbb{R})$):

$$\begin{aligned} x + y &= \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m,1} & \cdots & x_{m,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_{1,1} & \cdots & y_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{m,1} & \cdots & y_{m,n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{1,1} + y_{1,1} & \cdots & x_{1,n} + y_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m,1} + y_{m,1} & \cdots & x_{m,n} + y_{m,n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

↳ CONSIDERIAMO L'INSIEME DEI POLINOMI $P_m(\mathbb{R})$ DI UNA VARIABILE REALE, A COEFFICIENTI REALI, AL MASSIMO DI GRADO "m".
RICORDIAMO CHE $p(x)$ E $q(x)$ DI GRADO "h" E "k" RISPETTIVAMENTE (CON COEFFICIENTI REALI $p_0, p_1, p_2 \dots p_h$ E $q_0, q_1, \dots q_k$) SONO DEFINITI COME:

$$p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_h x^h$$

$$q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots + q_k x^k,$$

IL PRODOTTO TRA POLINOMIO E SCALARE È DEFINITO COME: $(\alpha \in \mathbb{R})$

$$\alpha p(x) = (\alpha p_0) + (\alpha p_1)x + (\alpha p_2)x^2 + \cdots + (\alpha p_h)x^h,$$

MENTRE, PER QUANTO RIGUARDA LA SOMMA $p(x) + q(x)$ ABBIAMO:

$$\text{se } h \geq k \;\Rightarrow\; p(x)+q(x) = (p_0+q_0)+(p_1+q_1)x+(p_2+q_2)x^2+\cdots+ \\ +(p_k+q_k)x^k + p_{k+1}x^{k+1}+\cdots+p_h x^h$$

$$\text{se } h < k \;\Rightarrow\; p(x)+q(x) = (p_0+q_0)+(p_1+q_1)x+(p_2+q_2)x^2+\cdots+ \\ +(p_h+q_h)x^h + q_{h+1}x^{h+1}+\cdots+q_k x^k.$$

LEZIONE 2

GENERALIZZIAMO LA DEFINIZIONE DI VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI:

↳ LO SONO SE NESSUNO DI ESSI PUÒ ESSERE SCRITTO COME COMBINAZIONE LINEARE DEGLI ALTRI

DEFINIZIONE L.I.

Definizione 2.2 *Sia dato l'insieme numerico $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}$ e l'insieme dei vettori non tutti nulli $\{v_1, \dots, v_m\}$ di $V(\mathcal{A})$. I vettori $\{v_1, \dots, v_m\}$ si dicono* **linearmente indipendenti su** $\mathcal{A}$ *se la relazione*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = w, \qquad \alpha_i \in \mathcal{A},\ i = 1, \dots, m$$

è soddisfatta se e solo se $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$, essendo w l'elemento neutro di $V(K)$. □

⇒ "w" PUÒ ESSERE VETTORE NULLO, MATRICE NULLA, POLINOMIO NULLO ....

SE ALMENO UNO DEGLI SCALARI $\alpha_i \neq 0$, ALLORA SONO LINEARMENTE DIPENDENTI

- PRESO L'INSIEME DEI NUMERI COMPLESSI SU SÉ STESSO $\mathbb{C}(\mathbb{C})$ QUAL È IL N° MASSIMO DI VETTORI L.I. ALL'INTERNO DI ESSO?
  ↳ È UNO SPAZIO VETTORIALE?
- SE INVECE PRENDESSI $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ QUANTI SAREBBERO?
- ENTRAMBI SONO SPAZI VETTORIALI: IL PRIMO HA DIMENSIONE 1 CON UNICO VETTORE L.I. $\underbrace{= \vec{1}}_{\text{BASE DI } \mathbb{C}(\mathbb{C})}$ PERCHÉ $z = c \cdot 1$ ↱ PER OTTENERE $z = 0$ L'UNICO MODO È CHE $c = 0$
  IL SECONDO HA DIM = 2 CON I VETTORI $\{\vec{1}, \vec{i}\}$ PERCHÉ $c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot i = 0$ E NON POSSO OTTENERE QUESTO RISULTATO CON $c_1, c_2 \neq 0$

- IL NOSTRO OBIETTIVO È QUELLO DI STUDIARE POLIEDRI E TROVARE LA SOLUZIONE IN UNO DEI VERTICI

PROPOSIZIONE VETTORI L.I. CON MATRICE

DATI m VETTORI $v_1 \dots v_m \in \mathbb{R}^m$, ESSI SONO L.I. SSE IL $\det(A) \neq 0$

$$A = \left(v_1, \ \vdots \cdots \vdots \ , v_m \right) \in \mathbb{R}^{m \times m}$$ DOVE OGNI VETTORE AVRÀ m ELEMENTI

DEFINIZIONE DIMENSIONE SPAZIO

DATO LO SPAZIO $V(K)$, SI DICE CHE $V(K)$ HA DIMENSIONE "m" SE IL MASSIMO N° DI VETTORI DI $V(K)$, L.I. SU K, È ESATTAMENTE m. INFATTI, LO SPAZIO $V(K)$ VIENE ANCHE INDICATO COME $V^m(K)$.

- BASE: VETTORI L.I. CHE POSSO USARE PER CREARE QUALSIASI ALTRO VETTORE DELLO SPAZIO
- DIMENSIONE: NUMERO DI VETTORI ∈ BASE DELLO SPAZIO

IN GENERALE, $V^m(\mathbb{R})$ HA DIMENSIONE "m" PERCHÉ SERVONO m VETTORI PER GENERARE TUTTO LO SPAZIO
ATTENZIONE!!! POSSO AVERE UN INSIEME DI 4 VETTORI L.I. $\{(1,0,0)(0,1,0)(0,0,1)(1,1,1)\}$ IN $\mathbb{R}^3$ PERÒ QUESTI NON FORMANO UNA BASE DI $\mathbb{R}^3$ PERCHÉ QUEST'ULTIMA HA DIMENSIONE 3 (NON 4)
ESEMPIO PARTICOLARE: LO SPAZIO CONTENENTE SOLO IL VETTORE NULLO $\{\vec{0}\}$ HA DIMENSIONE ZERO

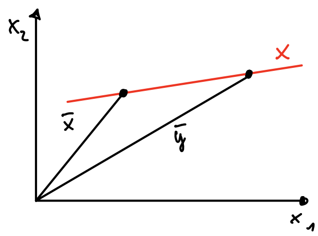
DEFINIZIONE COMBINAZIONE AFFINE

SIA DATO L'INSIEME DEI VETTORI $\{v_1 \dots v_m\}$ DI $\mathbb{R}^n$. IL VETTORE $s \in \mathbb{R}^n$ É UNA COMBINAZIONE AFFINE SU $\mathbb{R}$ DEI VETTORI $\{v_1 \dots v_m\}$ SE:

$$s = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m \quad \text{CON} \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \ , \ \alpha_i \in \mathbb{R} \ , \ i = 1 \dots m$$

QUINDI LA SOMMA DI TUTTI GLI SCALARI $(\alpha_1 + \alpha_2 \dots + \alpha_m = 1)$ DEVE DARE COME RISULTATO 1 (POSSONO ANCHE ESSERE NEGATIVI)

VISUALIZZAZIONE GEOMETRICA:



- X : VETTORE AFFINE
  $\bar{x}$, $\bar{y}$: VETTORI UTILIZZATI PER LA COMBINAZIONE

- I VETTORI NON DEVONO ESSERE NECESSARIAMENTE INDIPENDENTI (IN BASE A QUALE TIPO É PRESENTE, CAMBIA LA STRUTTURA GEOMETRICA)

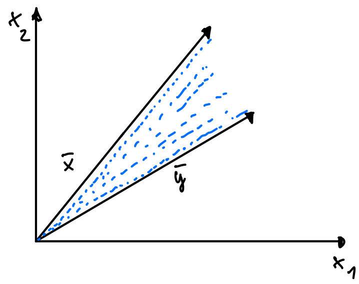
DEFINIZIONE COMBINAZIONE CONICA

SIA DATO L'INSIEME DEI VETTORI $\{v_1 \dots v_m\}$ DI $\mathbb{R}^n$, SI DICE CHE IL VETTORE $z \in \mathbb{R}^n$ É UNA COMBINAZIONE CONICA SU $\mathbb{R}$ DEI VETTORI $\{v_1 \dots v_m\}$ SE:

$z = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$, CON $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$

QUESTA RESTRIZIONE IMPLICA CHE I VETTORI NELLA COMBINAZIONE NON POSSANO "INVERTIRE DIREZIONE" RISPETTO AGLI ALTRI VETTORI ⟹ OGNI SCALARE AVRÀ SEGNO POSITIVO

- I VETTORI POSSONO ESSERE DIPENDENTI / INDIPENDENTI (IN BASE A QUALE TIPO É PRESENTE, CAMBIA LA STRUTTURA GEOMETRICA)

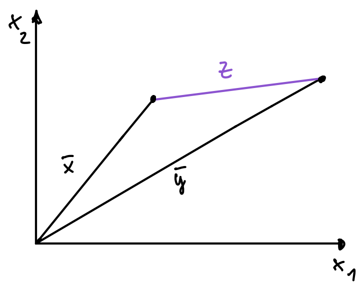


- POSSO GENERARE TUTTI I VETTORI IN QUESTO "CONO" CHE HA COME ESTREMI (NEL CASO DI $\mathbb{R}^2$ NEL GRAFICO) $\bar{x}$ E $\bar{y}$
  ↳ $\bar{x}$ E $\bar{y}$ SONO VETTORI CHE FANNO PARTE DELLA COMBINAZIONE LINEARE PER CREARE IL VETTORE CONICO

DEFINIZIONE COMBINAZIONE CONVESSA

SIA DATO L'INSIEME DEI VETTORI $\{v_1 \dots v_m\}$ DI $\mathbb{R}^n$, SI DICE CHE IL VETTORE $y \in \mathbb{R}^n$ É UNA COMBINAZIONE CONVESSA SU $\mathbb{R}$ DEI VETTORI $\{v_1 \dots v_m\}$ SU $\mathbb{R}$, SE È AL CONTEMPO UNA COMBINAZIONE AFFINE ED UNA COMBINAZIONE CONICA DI $\{v_1 \dots v_m\}$:

$$y = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m \quad \text{CON} \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \ , \ \alpha_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m$$



- Z È LA COMBINAZIONE CONVESSA DI $\bar{x}$ E $\bar{y}$, CON I CORRISPETTIVI COEFFICIENTI MAGGIORI O UGUALI A ZERO E LA LORO SOMMA = 1

- NOTA: IN $\mathbb{R}^3$ SARANNO RISPETTIVAMENTE: AFFINE = PIANO INFINITO CHE PASSA PER I 3 VETTORI
  CONICA = PIRAMIDE CON 3 FACCE CHE SI ESTENDONO ALL'INFINITO
  CONVESSA = TRIANGOLO: SUPERFICIE PIANA LIMITATA TRA I 3 VETTORI

DEFINIZIONE PRODOTTO SCALARE

: FUNZIONE: PRENDE 2 VETTORI E SI OTTIENE UN N° $\mathbb{R}$

SIA DATO LO SPAZIO VETTORIALE $V^n(K)$, DEFINIAMO IL PRODOTTO SCALARE "$\langle \bullet, \bullet \rangle$" COME LA FUNZIONE DEFINITA DA $V^n(K) \times V^n(K)$ IN $\mathbb{R}$, CHE SODDISFA LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\forall x \in V^n(K)$, CON $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ → PRODOTTO SCALARE DI UN VETTORE CON SÉ STESSO NON DEVE ESSERE NEGATIVA
2. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$, $\forall x, y, z \in V^n(K)$, → RIDURRE COMPLESSITÀ DIVIDENDO IN 2 SOTTOPROBLEMI

3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\forall x, y \in V^n(K)$ $\longrightarrow$ PROPRIETÀ COMMUTATIVA

NOTA: SE FACCIO PRODOTTO SCALARE TRA UN VETTORE QUALSIASI ED IL VETTORE NULLO ENTRAMBI $\in V^n(K)$, IL RISULTATO SARÁ SEMPRE ZERO

ESEMPIO

DATO LO SPAZIO VETTORIALE $\mathbb{R}^n$ E PRESI I VETTORI $x, y \in \mathbb{R}^n$, CON

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

DEFINIAMO IL PRODOTTO SCALARE STANDARD MEDIANTE LA:

$$\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

RICORDA! STIAMO UTILIZZANDO LA DEFINIZIONE DI MOLTIPLICAZIONE TRA MATRICI : FACENDO LA TRASPOSTA DI x, AVRÓ CHE LA PRIMA "MATRICE" $1 \times n$ HA LE STESSE COLONNE (n) DELLE RIGHE DELLA SECONDA $n \times 1$ (SEMPRE n) $\longrightarrow$ CON QUESTA DEF. SI OTTIENE UNA NUOVA MATRICE, CON QUELLO CHE STIAMO FACENDO NOI INVECE UN NUMERO $\in \mathbb{R}$

DEFINIZIONE VETTORI ORTOGONALI

DATI I VETTORI x, y DELLO SPAZIO VETTORIALE $\mathbb{R}^n$, SI DIRÁ CHE x ED y SONO ORTOGONALI (CIOÉ : $x \perp y$) SE SCELTO IL PRODOTTO SCALARE STANDARD , RISULTA:

$$x^T y = 0$$

ALLORA, IL VETTORE NULLO (CHE È UNICO $\in V^n(\mathbb{R})$) È SEMPRE ORTOGONALE RISPETTO A TUTTI GLI ALTRI VETTORI

- PROPOSIZIONE: DATI I VETTORI $v_1 \dots v_m \in \mathbb{R}^n / \{0\}$, CON $m \leq n$, SIA $v_i^T v_j = 0$, PER OGNI $1 \leq i \neq j \leq m$. ALLORA I VETTORI $v_1 \dots v_m$ SONO ORTOGONALI E L.I. IN $\mathbb{R}^n$.

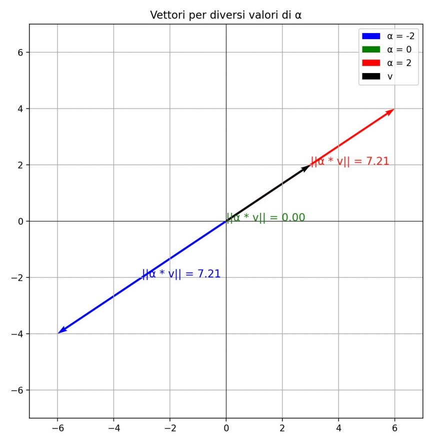
  NOTA: SE SONO ORT $\Rightarrow$ SONO L.I. , SE SONO L.I $\not\Rightarrow$ NON È DETTO SIANO ORT.

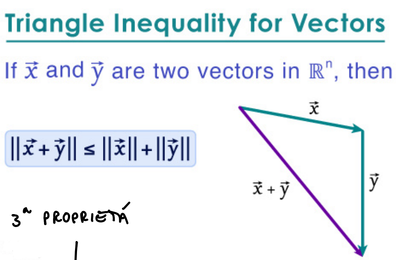
DEFINIZIONE NORMA (HA 1 ARGOMENTO CHE É UN VETTORE , FUNZIONE CHE PRENDE UN VETTORE E COME RES UN N° ≥ 0)

SIA DATO LO SPAZIO VETTORIALE $V^n(\mathbb{R})$, INTRODUCIAMO LA NORMA DI UN VETTORE $x \in V^n(\mathbb{R})$, DEFINITA COME LA FUNZIONE DA $V^n(\mathbb{R})$ IN $\mathbb{R}^+$, INDICATA COME $\| \cdot \|$, CHE SODDISFA LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

1. $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V^n(\mathbb{R})$, CON $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ (VETT. NULLO)
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\forall x \in V^n(\mathbb{R})$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in V^n(\mathbb{R})$ $\longrightarrow$ DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

- POSSIAMO ASSOCIARE LA NORMA DI UN VETTORE ALLA SUA LUNGHEZZA



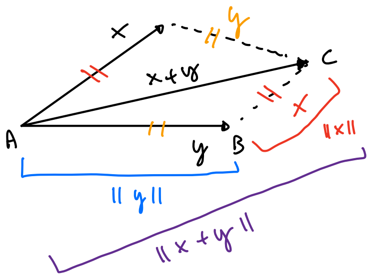


2^a PROPRIETÁ: $\longrightarrow$

SE α FOSSE COMPRESO TRA -1 E 1 , E $\neq 0$ IL VETTORE SI ACCORCEREBBE ANZICHÉ ALLUNGARSI

3^a PROPRIETÁ

ALTRO ESEMPIO: $x, y \in V^n(\mathbb{R})$: $x + y =$



EQUIPOLLENTI

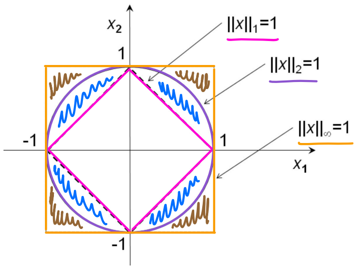
EQUIPOLLENTI

LEZIONE 3

ESEMPIO DI NORMA : NOTA : $\doteq$ VUOL DIRE "IO LO DEFINISCO COME..."

USO FREQUENTE :

1. NORMA EUCLIDEA $\rightarrow$ $\|x\|_2 \doteq (x^T x)^{1/2} = [x_1^2 + x_2^2 + \dots x_m^2]^{1/2}$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$
2. $\|x\|_1 \doteq |x_1| + \dots + |x_m|$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$ $\rightarrow$ SOMMA DEI MODULI DELLE COMPONENTI
3. $\|x\|_\infty \doteq \max_{1 \le i \le m} |x_i|$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$ $\rightarrow$ PRENDO IL MODULO DELLA COMPONENTE PIÚ ALTA TRA $x_1 \dots x_m$



$\mathbb{R}^2$: $x_1 = x$, $x_2 = y$

COORDINATE

- CIRCONFERENZA : NORMA EUCLIDEA
  - ↳ OGNI PUNTO DELLA CIRCONFERENZA È DATO DALLE COORDINATE $\overset{x}{x_1}, \overset{y}{x_2}$: $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
  - ↳ $x_1^2 + x_2^2 = 1$ $\rightarrow$ EQ. PALLA UNITARIA $\rightarrow$ EQ. DELLA CIRCONFERENZA DI RAGGIO 1
- ROMBO : NORMA MANHATTAN
  - ↳ DEFINIZIONE : $\|x\|_1 = |\overset{x}{x_1}| + |\overset{y}{x_2}|$ OGNI PUNTO È DATO DA QUESTA EQ.
  - ↳ L'EQ. DESCRIVE IL ROMBO CON VERTICI IN $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$
- QUADRATO : NORMA DEL MASSIMO
  - ↳ DEF. : OGNI PUNTO DEL QUADRATO È CALCOLATO CON $\|x\|_\infty = \max(|\overset{x}{x_1}|, |\overset{y}{x_2}|)$
  - ↳ L'EQ. DESCRIVE UN QUADRATO CON LATI PARALLELI AGLI ASSI E VERTICI IN : $(1,1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$

• NOTA : SE DEFINISSI LE NORME TRA $\|x\|_1$ E $\|x\|_2$, POI DA $\|x\|_2$ A $\|x\|_\infty$ TROVEREI TUTTI I PUNTI TRA GLI SPAZI (1) E (2)

• ESISTE UNA RELAZIONE TRA PRODOTTO SCALARE E NORMA $\rightarrow$ IN PARTICOLARE PRODOTTO SCALARE STANDARD E NORMA EUCLIDEA :

↳ DATI $x, y \in \mathbb{R}^m$:

• $\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i = \|x\|_2 \|y\|_2 \cos(\widehat{xy})$ $\rightarrow$ $*^1$

↳ SE $x \overset{\text{ORT.}}{\perp} y$ ALLORA SIA $x^T y$ CHE $\cos(\widehat{xy})$ SONO UGUALI A ZERO

↳ FORMULA PER TROVARE L'ANGOLO TRA 2 VETTORI : $\cos(\theta) = \dfrac{\langle x, y \rangle}{\|x\|_2 \|y\|_2}$

$x^T y = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 \dots$

$\rightarrow$ $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 \dots}$ $\sqrt{y_1^2 + y_2^2 \dots}$

↳ SE VOGLIO TROVARE L'ANGOLO θ BASTA FARE : $\theta = \arccos\left(\dfrac{x^T y}{\|x\|_2 \|y\|_2}\right)$

ESEMPIO : DIMOSTRAZIONE UGUAGLIANZA $*^1$

SCELGO 2 VETTORI : $x, y \in \mathbb{R}^2$

$x = (1, 0)$ $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$x^T y = \left(1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(0 \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\|x\|_2 = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$

$\|y\|_2 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$

$\cos(\widehat{xy}) = \dfrac{\sqrt{3}/2}{1 \cdot 1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\rightarrow$ $\widehat{xy} = 30°$

ESEMPIO DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE IN GENERALE : $\|x + y\| = \sqrt{\underbrace{(x_1 + y_1)^2}_{x_1^2 + y_1^2} + (x_2 + y_2)^2 \dots}$

$x = (3, 4)$ $y = (-1, 2)$

SOMMO I VETTORI :

$x + y = (3 + (-1), 4 + 2) = (2, 6)$ $\rightarrow$ $\|x + y\| = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$

$\|x\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$\|y\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

ALLORA DEVE ESSERE SODDISFATTA :

$\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ $\rightarrow$ $2\sqrt{10} \le 5 + \sqrt{5}$ ✓ OK

ESEMPIO DI CALCOLO DI DISTANZA TRA 2 PUNTI IN $\mathbb{R}^n$

→ DIFF. NORMA

DEFINIAMO LA DISTANZA $d(\bar{x}, \bar{y})$ TRA I PUNTI $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ E $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$: $d(\bar{x}, \bar{y}) = \| \bar{x} - \bar{y} \|_2$

↳ QUINDI : $\| x - y \| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \ldots\ldots}$

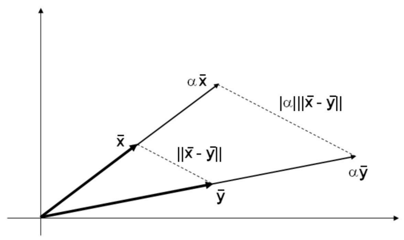
↳ QUALSIASI NORMA

$x = (1, 2)$

$y = (4, 6)$

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(1-4)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{25} = 5$$

• ATTENZIONE: È COME SE MOLTIPLICASSI y PER -1 PER AVERE LA "SOTTRAZIONE" TRA $x - y$, IN REALTÀ SAREBBE $x + (-1) y$



DEFINIZIONE DI FUNZIONE LINEARE

DATA LA FUNZIONE $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, SI DICE CHE $f(x)$ È <u>LINEARE</u> IN $\mathbb{R}^n$ SE SODDISFA LE RELAZIONI:

1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

2) $f(\alpha x) = \alpha \cdot f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

EQUIVALENTEMENTE, LE CONDIZIONI 1) E 2) POSSONO ESSERE COMPATTE NELL'UNICA CONDIZIONE

$1 \wedge 2)$ $f[\alpha x + \beta y] = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

DEFINIZIONE FUNZIONE AFFINE

DATA LA FUNZIONE $g(x)$, CON $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, DIREMO CHE $g(x)$ È UNA FUNZIONE AFFINE IN $\mathbb{R}^n$ SE ESISTE UNA FUNZIONE $f(x)$, LINEARE IN $\mathbb{R}^n$, ED UNA COSTANTE $\bar{c} \in \mathbb{R}$, TALI CHE:

$g(x) = f(x) + \bar{c}$

• NOTA: UNA FUNZIONE LINEARE È SEMPRE AFFINE PERCHÉ PUÒ ESSERE SCRITTA COME $f(x) = Ax + 0$ (CON $c = 0$).
UNA FUNZIONE AFFINE È LINEARE SSE $\bar{c} = 0$.

ESEMPIO FUNZIONE

• LA FUNZIONE $g(x) = 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 7$ È LINEARE? NO, PER ESSERLO NON DOVREBBE ESSERCI IL TERMINE NOTO $+7$. PER ESSERE LINEARE, IL TERMINE NOTO DOVREBBE ESSERE $= 0$ (O NON ESSERCI)